Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Дифференциальные и интегральные уравнения

Часть 3

Учебное пособие
для студентов физико-технического факультета

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2014

УДК 517.9
ББК 22.1
Д503

Издается в рамках реализации комплекса мероприятий Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012–2016 гг.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Петрозаводского государственного университета

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор *А. Н. Кириллов*;
канд. техн. наук, доцент *Е. П. Борматова*

Д503 **Дифференциальные и интегральные уравнения** : учебное пособие для студентов физико-технического факультета : в 3 ч. / сост. : Н. Ю. Светова, Е. Е. Семёнова. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014.

ISBN 978-5-8021-2129-0
Ч. 3. – 56 с.
ISBN xxx-x-xxxx-xxxx-x

В учебном пособии рассматриваются основные понятия и методы решения стандартных задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, приведены задания для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов.

Издание предназначено для студентов очной формы обучения направлений подготовки бакалавров «электроника и наноэлектроника» и «техническая физика», а также может быть полезно студентам других технических направлений подготовки.

УДК 517.9
ББК 22.1

ISBN xxx-x-xxxx-xxxx-x (ч. 3)
ISBN 978-5-8021-2129-0

Содержание

Введение 4

Тема 8. Интегральные уравнения 5

1. Основные понятия. Классификация линейных интегральных уравнений 5

2. Уравнения Вольтерры 2-го и 1-го рода 10

2.1. Уравнения Вольтерры 2-го рода 10

2.2. Уравнения Вольтерры 1-го рода 18

2.3. Системы интегральных уравнений Вольтерры 23

3. Однородное уравнение Фредгольма 2-го рода 25

3.1. Основные понятия и теоремы 25

3.2. Метод сведения интегрального уравнения к алгебраическим уравнениям 27

4. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода 32

4.1. Метод последовательных приближений 32

4.2. Метод резольвент (метод итерированных ядер 33

4.3. Метод сведения к алгебраическим уравнениям 36

4.4. Теоремы Фредгольма 40

4.5. Интегральные уравнения с симметричным ядром 43

Вопросы для самопроверки к теме 8 47

Упражнения для самостоятельной работы к теме 8 48

Ответы к упражнениям по теме 8 53

Список использованной и рекомендованной литературы 55

Введение

Учебное пособие содержит теоретический и практический материал по курсу «Дифференциальные и интегральные уравнения» и предназначено для организации самостоятельной работы студентов очной формы обучения по направлениям подготовки бакалавров «электроника и наноэлектроника» и «техническая физика».

В третьей части пособия рассматриваются основные типы линейных интегральных уравнений, уравнения Вольтерры и Фредгольма, а также основные методы их решения.

Материал излагается подробно и доступно для студентов, знакомых с классическими понятиями математического анализа и основными сведениями из линейной алгебры. Формулировки базовых теорем, необходимых для обоснования свойств и структуры решений интегральных уравнений, приводятся без доказательств. Изложение теоретического материала сопровождается подробным разбором соответствующих примеров. Так как некоторые интегральные уравнения могут быть решены сведением их к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также с помощью преобразования Лапласа, то необходимо знать материал соответствующих тем, рассмотренных в первой и второй частях пособия [4, 5].

Такое изображение в тексте пособия указывает на то, что предлагаемые действия и задания должны быть выполнены студентами самостоятельно.

В конце темы даются вопросы для самопроверки и задачи для самостоятельного решения.

В конце пособия приведен список литературы, использованной при его подготовке. Строгое обоснование рассмотренных методов решения линейных интегральных уравнений, а также методов решения нелинейных уравнений можно найти в [3, 6, 8, 10]. Составители пособия рекомендуют также и справочную литературу [11], в которой концентрированно дается информация о точных, асимптотических, приближенных аналитических и численных методах решения линейных и нелинейных интегральных уравнений, которая будет полезна при исследовании реальных физических задач.

Тема 8. Интегральные уравнения

Интегральные уравнения широко используются в различных разделах физики (теория волн на поверхности жидкостей, квантовая механика, задачи спектроскопии, кристаллографии, акустики, анализа и диагностики плазмы и т.д.), геофизики (задачи гравиметрии, кинематические задачи сейсмики), механики (колебания конструкций) и др.

«Когда в физике введено последействие, то уже недостаточно обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных, иначе начальные данные определяли бы будущее состояние. Чтобы учесть *непрерывную последовательность* предшествующих состояний, нужно использовать интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, где под знаком интеграла фигурируют функции параметров, характеризующих систему, которые зависят от времени в течение некоторого периода, предшествующего рассматриваемому моменту.»[1]

Построение общей теории линейных интегральных уравнений было начато в конце 19 в. Её основоположниками считаются Вито Вольтерра (1840–1940), Эрик Ивар Фредгольм (1866–1927), Давид Гильберт (1862–1943) и Эрхард Шмидт (1876–1959).

1. Основные понятия. Классификация линейных интегральных уравнений

Интегральным уравнением, называется уравнение, содержащее неизвестную функцию, которую обозначим $y(x)$, под знаком интеграла:

$$\int\limits_a^b F(x,t,y(t))\,dt = G(x,y(x)). \tag{1}$$

Здесь F, G – заданные функции. Если функция G в правой части уравнения (1) не зависит от $y(x)$, то говорят об интегральном уравнении *1-го рода*, в общем случае – об уравнении *2-го рода*[2].

[1] В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976, С. 163.

[2] Название *интегральное уравнение* впервые употребил немецкий математик **Поль Дюбуа-Реймон** (1888). **Эмиль Пикар** добавил к названиям уравнений имя Вольтерры. Д. Гильберт ввел классификацию – *уравнения первого и второго ро-*

Область $S = [a, b] \times [a, b]$ изменения переменных x и t в уравнении[3] (1) называется **основным квадратом**. Функция F считается определенной в S. Промежуток $[a, b]$, на котором ищется функция $y(x)$, называется **областью определения** уравнения (1). Промежуток $[a, b]$ может быть и бесконечным ($a = -\infty$ и/или $b = +\infty$).

Определение 1. **Решением интегрального уравнения** *(1) на промежутке $[a, b]$ называют функцию $y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество для всех $x \in [a, b]$.*

Покажите, что функция $y(x) = xe^{-x}$ является решением уравнения $y(x) - 4 \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+t)} y(t)\, dt = (x-1)e^{-x}$.

Интегральное уравнение (1) называют **линейным**, если в него неизвестная функция входит линейно.

Линейное интегральное уравнение вида

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt + f(x), \tag{2}$$

называется **интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода**.

Уравнение

$$\int\limits_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x). \tag{3}$$

называют **интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода**.

В уравнениях (2), (3) функции $f(x), K(x, t)$ являются заданными, $y(x)$ – искомая функция, λ – числовой параметр[4], $x \in [a, b]$, $t \in [a, b]$.

Функция $K(x, t)$ называется **ядром интегрального уравнения**, $f(x)$ – **свободным членом**. Если $f \equiv 0$, то уравнения (2), (3) называются **однородными**, в противном случае – **неоднородными**.

да (1904). В начале 20 в. вводятся термины *ядро, спектр, собственное значение* и др. [1].

[3]В уравнениях 1-го рода области изменения переменных x и t могут и не совпадать.

[4]Переменный числовой параметр λ в уравнение (2) ввел **Анри Пуанкаре** при изучении уравнения колеблющейся мембраны (1896). Так что уравнение (2) представляет собой не одно уравнение, а семейство уравнений, зависящее от числового параметра λ.

В уравнениях Фредгольма ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x)$ либо непрерывны (ядро $K(x,t)$ в квадрате S, а свободный член $f(x)$ на отрезке $[a,b]$), либо квадратично интегрируемы, т. е. удовлетворяют условиям:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt < +\infty, \tag{4}$$

$$\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx < +\infty. \tag{5}$$

Ядра $K(x,t)$, удовлетворяющие условию (4), называют **фредгольмовыми**[5].

Уравнения Фредгольма 1-го рода являются типичными при математической обработке данных эксперимента. Задача состоит в следующем. Изучается явление, характеристики $y(x)$ которого недоступны для непосредственного измерения. Но можно измерить косвенные проявления процесса – функцию $f(x)$. Для изучаемого явления строится некоторая теоретическая модель, определяющая функцию $K(x,t)$. Тогда интересующие нас характеристики могут быть найдены из интегрального уравнения (3).

Например, уравнение (3), в котором $a = 0$, $b = l$, может описывать распределение яркости изображения объекта – отрезка длины l. Здесь функция $K(x,t)$ является известной функцией, определяемой выбором оптического прибора. Если плотность яркости изображения $f(x)$ известна, то, решая уравнение (3), можно найти распределение яркости объекта $y(x)$, которое дает заданную яркость изображения.

К интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода приводят задачи гравиразведки полезных ископаемых, задача восстановления размытого изображения. К однородным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода приводят, например, задачи о собственных колебаниях систем, т. е. колебаниях при отсутствии внешней силы.

[5]Следует заметить, что линейные интегральные уравнения (2), (3) называют уравнениями Фредгольма в случае, если их ядра $K(x,t)$ являются фредгольмовыми. Если линейное интегральное уравнение не является уравнением Фредгольма, то его называют *сингулярным интегральным уравнением*. Ядро сингулярного уравнения обращается в бесконечность в области интегрирования так, что соответствующий несобственный интеграл, содержащий неизвестную функцию, расходится и заменяется своим главным значением по Коши.

Частный случай линейных уравнений вида (2), (3), имеющий важное самостоятельное значение, возникает для ядер, удовлетворяющих условию

$$K(x,t) = 0, \quad t > x.$$

Такие ядра называют **ядрами Вольтерры**.

При этом уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) y(t)\, dt + f(x), \tag{6}$$

$$\int_a^x K(x,t) y(t)\, dt = f(x). \tag{7}$$

называют **уравнениями Вольтерры** соответственно **2-го** и **1-го рода**.

К линейным уравнениям Вольтерры 2-го рода приводит, например, решение начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$y'' - y' \sin x + e^x\, y = x$$

и начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Решение. Пусть $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\, dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)\, dt + 1,$$

$$y = \int_0^x \int_0^z \varphi(t)\, dt\, dz + x + y(0) = \int_0^x \varphi(t)\, dt \int_t^x dz + x = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\, dt + x.$$

Подставляя выражения для $y,\ y',\ y''$ в заданное уравнение, получим интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$\varphi(x) = \int_0^x (\sin x - (x-t)e^x)\, \varphi(t)\, dt + \sin x + (1 - e^x)x.$$

$\square$

Уравнение

$$z(x) = \lambda^* \int_a^b K^*(t,x) z(t)\, dt + g(x), \tag{8}$$

(где λ^*, K^* – комплексно сопряженные к λ, K величины) называется уравнением, **союзным** (**сопряженным**) к уравнению (2), а ядро $K^*(t,x)$ – **союзным** к ядру $K(x,t)$.

Введем еще несколько понятий, характеризующих ядро интегрального уравнения.

Если $K(x,t) = K^*(t,x)$, то ядро интегрального уравнения называется **эрмитовым**[6].

Если ядро вещественно и $K(x,t) = K(t,x)$, то ядро называется **симметричным**. Симметричное ядро – это частный случай эрмитова.

Ядро называется **полярным**, если оно представимо в виде

$$K(x,t) = \frac{\Phi(x,t)}{|x-t|^\alpha}, \tag{9}$$

где $\Phi(x,t)$ – непрерывная функция, а α – число, $0 < \alpha < n$, n – размерность пространства переменных[7].

Если ядро имеет вид (9) и $\alpha < n/2$, то оно называется **слабополярным**.

Определение 2. *Ядро называется* **вырожденным**[8], *если оно представимо в виде конечной суммы произведений функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:*

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i(x) \omega_i(t). \tag{10}$$

Можно считать, что функции $\Omega_i(x)$ линейно независимы, так как каждая линейная связь между ними уменьшает число слагаемых в сумме (10) на 1. Также можно считать линейно независимыми и функции $\omega_i(t)$.

---

[6] Название дано в честь французского математика **Шарля Эрмита** (1822–1901).

[7] В случае, когда $x \in [a,b]$, размерность пространства переменных $n = 1$.

[8] В физической литературе используется также и термин *сепарабельное* ядро (от английского слова separable – разделимый).

Прежде, чем рассмотреть некоторые методы решения интегральных уравнений, следует заметить, что для них, как и для дифференциальных уравнений, не всегда удается получить точное аналитическое решение. Выбор метода решения зависит от вида уравнения.

2. Уравнения Вольтерры 2-го и 1-го рода

2.1. Уравнения Вольтерры 2-го рода. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода[9]

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{11}$$

где $K(x,t)$ – непрерывное или полярное ядро, а свободное слагаемое $f(x)$ является непрерывной функцией.

Некоторые частные виды уравнения (11) можно решать, сводя их к дифференциальным уравнениям.

При решении таким способом необходимо знать формулу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt = f(x,\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x,t)\,dt. \tag{12}$$

В частности,

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x f(x,t)\,dt = f(x,x) + \int\limits_0^x f'_x(x,t)\,dt. \tag{13}$$

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = e^x + \int\limits_0^x y(t)\,dt. \tag{14}$$

[9] Первоначально В. Вольтерра рассматривал «уравнение первого рода», которое, как оказалось, можно свести к более удобному «уравнению второго рода». В серии статей 1884–1896 гг. он развил общий метод решения таких уравнений, который явился затем основой работ И. Фредгольма и Д. Гильберта [1]. Вольтерра доказал, что если ядро и правая часть уравнения непрерывны, то (11) имеет при любом конечном значении λ одно и только одно непрерывное решение, которое можно построить по методу последовательных приближений [9].

Решение. Продифференцируем уравнение (14):

$$y'(x) = e^x + y(x).$$

Получим дифференциальное уравнение для функции $y(x)$

$$y' - y = e^x. \tag{15}$$

Рассматривая заданное уравнение при $x = 0$, построим начальное условие для уравнения (15)

$$y(0) = 1. \tag{16}$$

Покажите, что решением задачи Коши (15), (16) является функция

$$y(x) = e^x(x+1),$$

Она и определяет решение заданного интегрального уравнения. □

Пример 3. Решить уравнение

$$y(x) = e^{-x}\cos x - \int\limits_0^x \cos x \cdot e^{t-x} y(t)\,dt.$$

Решение. Здесь ядро $K(x,t) = e^t \cdot e^{-x}\cos x$ является вырожденным. Введем функцию

$$u(x) = \int\limits_0^x e^t \cdot y(t)\,dt. \tag{$A1$}$$

Тогда заданное уравнение запишется в виде

$$y(x) = e^{-x}\cos x - \cos x \cdot e^{-x} \cdot u(x). \tag{$A2$}$$

Для функции $u(x)$ найдем производную, используя формулу (13),

$$u'(x) = e^x y(x). \tag{$A3$}$$

В последнее уравнение ($A3$) подставим вместо $y(x)$ выражение ($A2$). Получим уравнение

$$u'(x) = \cos x - u(x) \cdot \cos x$$

или

$$u'(x) + u(x) \cdot \cos x = \cos x,$$

начальным условием для которого, в соответствии с определением $(A1)$, будет

$$u(0) = 0.$$

Получили задачу Коши для неоднородного линейного уравнения 1-го порядка. Покажите, что ее решение имеет вид

$$u(x) = 1 - e^{-\sin x}.$$

Подставляя найденное выражение для u в $(A2)$, получим решение заданного уравнения

$$y(x) = \cos x \cdot e^{-(x+\sin x)}.$$

$\square$

Обобщая процедуру построения решения интегрального уравнения в рассмотренном примере, нетрудно показать, что решение линейного интегрального уравнения с вырожденным ядром $K(x,t) = \Omega(x)\omega(t)$:

$$y(x) = f(x) + \int\limits_0^x \Omega(x)\,\omega(t)\,y(t)\,dt$$

может быть найдено по формуле

$$y(x) = f(x) + \Omega(x)\,u(x),$$

где функция $u(x)$ является решением задачи Коши:

$$u'(x) = \omega(x)(f(x) + \Omega(x)u(x)), \quad u(0) = 0.$$

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода с ядром $K(x-t)$, зависящем от разности аргументов,

$$y(x) = f(x) + \int\limits_0^x K(x-t)\,y(t)\,dt. \tag{17}$$

Уравнения с такими ядрами называют уравнениями **типа свертки**[10].

[10] Интеграл вида $\int\limits_0^x K(x-t)y(t)\,dt$ называется сверткой по Лапласу функций $K(x)$ и $y(x)$.

Если функции $f(x)$ и $K(x)$ являются достаточно гладкими и имеют конечный показатель роста при $x \geqslant 0$, тогда решение уравнения (17) может быть построено с помощью преобразования Лапласа[11].

Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p), f(x) \risingdotseq F(p), K(x) \risingdotseq K^\star(p)$. Переходя в уравнении (17) к изображениям и используя свойство изображения свертки, получим соответствующее операторное уравнение

$$Y(p) = F(p) + K^\star(p)Y(p).$$

Отсюда будем иметь

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K^\star(p)}.$$

Оригинал для изображения $Y(p)$ есть искомое решение интегрального уравнения (17).

Пример 4. Решить интегральное уравнение:

$$y(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x-t)\, y(t)\, dt.$$

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как интеграл, входящий в заданное уравнение, представляет собой свертку двух функций x и $y(x)$, то его изображением будет произведение изображений этих функций, т. е. $\frac{1}{p^2}Y(p)$. Применив к уравнению преобразование Лапласа, получим следующее операторное уравнение:

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2}Y(p).$$

Его решение имеет вид:

$$Y(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{p}{p^2-1}\,\frac{p}{p^2+1}.$$

Так как

$$\frac{p}{p^2-1} \risingdotseq \operatorname{ch} x; \qquad \frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos x,$$

то соответствующий изображению $Y(p)$ оригинал является сверткой двух функций – $\operatorname{ch} x$ и $\cos x$:

$$y(x) = \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t) \cos t\, dt.$$

[11]Основные понятия (оригинал, показатель роста, изображение) и свойства преобразования Лапласа рассмотрены в теме 5 [5].

Вычислив интеграл, получим искомое решение.

Ответ: $y(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}$. □

Сформулируем теорему единственности решения уравнения (11), в которой устанавливаются общие способы его построения: метод последовательных приближений и метод резольвент [2].

Теорема 1. *Уравнение (11) имеет единственное непрерывное решение при любом значении* λ. *Это решение может быть найдено:*

а) как предел равномерно сходящейся последовательности функций[12] $\{y_n(x)\}$, *определяемой рекуррентным соотношением*

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\, y_n(t)\, dt + f(x), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{18}$$

когда $y_0(x)$ *– любая непрерывная функция (т. е. методом последовательных приближений);*

б) из равенства

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda) f(t)\, dt, \tag{19}$$

где функция

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t), \tag{20}$$

называется **резольвентой**[13], *а функции* $K_n(x,t)$, *называемые* **по-**

[12]Последовательность функций $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, называется *равномерно сходящейся* на множестве D к предельной функции $\varphi(x)$, если для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $N = N(\epsilon)$, что $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \epsilon$ при $n > N$ для всех точек x из множества D.

[13]Термин *резольвента* (от лат. resolvens, род. падеж resolventis – развязывающий, решающий) используется в математике в различных значениях. При этом основным свойством резольвенты является: определение резольвенты уравнения позволяет решить и само уравнение. В теории интегральных уравнений резольвенту называют еще *разрешающим ядром.* Ряд в правой части формулы (20) называют *рядом Неймана* ядра $K(x,t)$.

вторными ядрами, *определяются из рекуррентного соотношения*

$$K_1(x,t) = K(x,t), \quad K_{n+1}(x,t) = \int\limits_t^x K(x,s)K_n(s,t)\,ds \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

В силу сформулированной выше теоремы единственности решения уравнения (11), соответствующее ему однородное уравнение имеет лишь нулевое (тривиальное) решение.

Приведем для некоторых функций представления в виде степенного ряда, которые полезно знать при построении решений интегральных уравнений методом последовательных приближений и методом резольвент:

$$\begin{aligned}
&e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};\\
&\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};\\
&\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};\\
&\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n}, \quad x \in (-1;1];\\
&\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};\\
&\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Пример 5. Решить интегральное уравнение *методом последовательных приближений*

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(t)\,dt, \qquad y_0(x) = 0.$$

Решение. Построим последовательность функций $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ по формуле

$$y_n(x) = f(x) + \int\limits_a^x K(x,t)y_{n-1}(t)\,dt. \tag{$*$}$$

Если ядро $K(x,t)$ и функция $f(x)$ непрерывны соответственно при $x \in [a,b]$, $t \in [a,x]$ и на отрезке $[a,b]$, то построенная последовательность приближений $y_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, при $n \to \infty$ сходится к единственному непрерывному решению интегрального уравнения.

В нашем случае $K(x,t) \equiv 1$ и $f(x) \equiv 1$. Зная, что $y_0(x) = 0$, по формуле $(*)$ найдем:

$$y_1(x) = 1 + \int\limits_0^x y_0(t)\,dt = 1 + \int\limits_0^x 0\,dt = 1,$$
$$y_2(x) = 1 + \int\limits_0^x y_1(t)\,dt = 1 + \int\limits_0^x dt = 1 + x,$$
$$y_3(x) = 1 + \int\limits_0^x y_2(t)\,dt = 1 + \int\limits_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \tfrac{x^2}{2},$$
$$y_4(x) = 1 + \int\limits_0^x y_3(t)\,dt = 1 + \int\limits_0^x (1 + t + \tfrac{t^2}{2})\,dt = 1 + \tfrac{x}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!}.$$

Очевидно,

$$y_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Справедливость последней формулы можно доказать с помощью метода математической индукции.

Теперь, устремляя $n \to +\infty$, найдем

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Таким образом, решением заданного уравнения является функция $y(x) = e^x$. $\square$

Пример 6. Найти резольвенту $R(x,t,\lambda)$ ядра $K(x,t) = xt$ и, используя ее, решить интегральное уравнение

$$y(x) = x + \int\limits_0^x xt\,y(t)\,dt.$$

Решение. По формулам (21) найдем повторные ядра для ядра $K(x,t) = xt$:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = xt,$$

$$K_2(x,t) = \int\limits_t^x K(x,s)\cdot K_1(s,t)\,ds = \int\limits_t^x xs^2t\,ds = xt\cdot\tfrac{x^3-t^3}{3},$$

$$K_3(x,t) = \int\limits_t^x K(x,s)\cdot K_2(s,t)\,ds = \int\limits_t^x xs^2t\tfrac{s^3-t^3}{3}\,ds = \tfrac{xt}{2}\cdot\left(\tfrac{x^3-t^3}{3}\right)^2.$$

В общем случае будем иметь

$$K_n(x,t) = \int\limits_t^x K(x,s)\cdot K_{n-1}(s,t)\,ds = \frac{xt}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{x^3-t^3}{3}\right)^{n-1}.$$

По формуле (20) найдем резольвенту:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\frac{xt}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{x^3-t^3}{3}\right)^{n-1} =$$

$$= xt\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda(x^3-t^3)}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} = xte^{\frac{1}{3}\lambda(x^3-t^3)}.$$

Решение заданного интегрального уравнения построим по формуле (19). В нашем случае $\lambda = 1$, $a = 0$, $f(x) = x$. Подставляя в формулу (19) найденное выражение для резольвенты $R(x,t,\lambda)$, получим

$$y(x) = x + \int\limits_0^x xte^{\frac{1}{3}\lambda(x^3-t^3)}\cdot t\,dt = x + xe^{\frac{x^3}{3}}\int\limits_0^x t^2e^{-\frac{t^3}{3}}\,dt =$$

$$= x - xe^{\frac{x^3}{3}}\int\limits_0^x d\left(e^{-\frac{t^3}{3}}\right) = x - xe^{\frac{x^3}{3}}\left(e^{-\frac{x^3}{3}} - 1\right) = x\,e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Ответ: $y(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}$. □

Метод последовательных приближений и метод резольвент являются достаточно трудоемкими. К ним имеет смысл прибегать в том случае, когда нет других, более легких способов решения.

Постройте решения интегральных уравнений примеров 5 и 6 методом сведения к дифференциальным уравнениям.

2.2. Уравнения Вольтерры 1-го рода. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры 1-го рода

$$\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{22}$$

Для того чтобы уравнение (22) имело непрерывное решение $y(x)$, необходимо выполнение условия $f(a) = 0$.

Уравнение (22) в некоторых случаях может быть сведено к уравнению Вольтерры 2-го рода.

Пусть $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируемые по x функции и $K(x,x) \neq 0$ всюду на $[a,b]$. Тогда, дифференцируя (22) по x и деля на $K(x,x)$, получим уравнение

$$y(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)} y(t)\,dt = \frac{f'(x)}{K(x,x)},$$

которое будет уже уравнением Вольтерры 2-го рода.

Справедливо следующее утверждение [6]. *Если функции $f(x)$ и $K(x,t)$ имеют непрерывные производные $f'(x)$ и $\dfrac{\partial K}{\partial x}$, $f(a) = 0$, а $K(x,x)$ не обращается в нуль на $[a,b]$, то уравнение (22) имеет на интервале $[a,b]$ единственное непрерывное решение.*

Замечание. Если в уравнении Вольтерры 1-го рода $K(x,x) \equiv 0$ на $[a,b]$, то после дифференцирования уравнения новое уравнение будет также уравнением Вольтерры 1-го рода. Если условия для нового ядра и новой функции $f(x)$, указанные в сформулированном выше утверждении, выполнены, то можно повторить дифференцирование.

Пример 7. Решить уравнение

$$\int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt = \frac{x^2}{2},$$

сведя это уравнение к уравнению Вольтерры 2-го рода.

Решение. Здесь $K(x,t) = e^{x-t}$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Условия для сведения уравнения к уравнению Вольтерры 2-го рода выполнены (т. е. существуют непрерывные производные $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $f'(x)$, и $K(x,x) \neq 0$

всюду на $[0,b]$, $f(0)=0$). Продифференцировав заданное уравнение (см. формулу (13)), получим

$$y(x)+\int\limits_0^x e^{x-t}y(t)\,dt=x$$

или

$$y(x)=x-\int\limits_0^x e^{x}e^{-t}y(t)\,dt.$$

Это уравнение Вольтерры 2-го рода. Ядро нового уравнения $K(x,t)=e^xe^{-t}$ является вырожденным, поэтому полагая $u(x)=\int\limits_0^x e^{-t}y(t)\,dt$ и найдя $u'(x)=e^{-x}y(x)$, получим неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$u'+u=xe^{-x}$$

с начальным условием $u(0)=0$. Решая его, найдем $u(x)=\frac{x^2}{2}e^{-x}$ и, следовательно, искомую функцию $y(x)=x-\frac{x^2}{2}$. □

Пример 8. Решить уравнение

$$\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt=1-\cos x,$$

сведя это уравнение к уравнению Вольтерры 2-го рода.

Решение. В данном уравнении ядро $K(x,t)=\sin(x-t)$, $f(x)=1-\cos x$. Производные $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}=\cos(x-t)$, $f'(x)=\sin x$ непрерывны и $f(0)=0$, однако $K(x,x)\equiv 0$. Продифференцировав заданное уравнение, получим уравнение 1-го рода

$$\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt=\sin x,$$

для которого выполнены условия существования единственного непрерывного решения. Дифференцируя последнее уравнение еще раз, получим

$$y(x)-\int_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt=\cos x.$$

Это уже уравнение Вольтерры 2-го рода. Складывая полученное уравнение с заданным, найдем $y(x)=1$.

Ответ: $y(x)=1$. □

Заметим, что попытка найти непрерывное решение интегрального уравнения (22) методом сведения его к дифференциальному уравнению, не учитывая необходимого условия для правой части ($f(a)=0$), может привести к неправильному результату. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 9. Найти непрерывное решение уравнения

$$\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt=\cos x.$$

Решение. Здесь $f(x)=\cos x$ и $f(0)=1\neq 0$. Но дифференцируя заданное уравнение, приходим к уравнению Вольтерры 1-го рода

$$\int_0^x y(t)\,dt=-\sin x.$$

для которого $f(x)=-\sin x$ и $f(0)=0$. Дифференцируя полученное уравнение, найдем

$$y(x)=-\cos x.$$

Но непосредственной подстановкой полученного для $y(x)$ выражения в заданное уравнение нетрудно убедиться, что $y(x)=-\cos x$ не является решением. Проверьте это самостоятельно.

Ответ: Заданное уравнение не имеет **непрерывного** решения. □

Покажите, что уравнение $\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt=x$ не имеет **непрерывного** решения.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерры 1-го рода с ядром $K(x,t)$, зависящем от разности аргументов, т. е. уравнение типа свертки

$$\int\limits_0^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x). \tag{23}$$

К уравнениям (23) приводят многие важные прикладные задачи. Пусть, например, $y(x)$ – излученный радиоимпульс, $f(x)$ – сигнал, записанный на некотором расстоянии от точки излучения. Процесс распространения сигнала может быть описан уравнением (23), в котором $K(x-t)$ – импульсная функция трассы распространения радиоимпульса, зависящая от свойств среды (грунта, влажности воздуха и т. д.). Если известны $K(x-t)$ и $f(x)$, то, решая уравнение (23), можно восстановить излученный сигнал $y(x)$.

Решение уравнения (23) может быть построено операционным метолом. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p), f(x) \risingdotseq F(p), K(x) \risingdotseq K^\star(p)$. Тогда, применив преобразование Лапласа к уравнению (23), получим операторное уравнение

$$K^\star(p)Y(p) = F(p) \;\Rightarrow\; Y(p) = \frac{F(p)}{K^\star(p)}.$$

Оригинал для $Y(p)$ дает искомое решение уравнения (23).

Пример 10. Решить уравнение

$$\int\limits_0^x e^{x-t}y(t)\,dt = \frac{x^2}{2}$$

с помощью преобразования Лапласа.

Решение. Заметим, что для правой части уравнения $f(x) = \frac{x^2}{2}$ выполняется условие $f(0) = 0$. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Так как

$$e^x \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \qquad \frac{x^2}{2} \risingdotseq \frac{1}{p^3},$$

то, применив преобразование Лапласа к заданному уравнению, получим соответствующее ему операторное уравнение

$$\frac{1}{p-1}\,Y(p) = \frac{1}{p^3}.$$

Отсюда будем иметь

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^3}, \quad Y(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} \risingdotseq x - \frac{x^2}{2}.$$

Ответ: $y(x) = x - \frac{x^2}{2}$. □

Пример 11. Решить уравнение

$$\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt = 1 - \cos x$$

с помощью преобразования Лапласа.

Решение. Здесь для правой части $f(x) = 1 - \cos x$ имеем $f(0) = 0$. Так как

$$\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \qquad 1 - \cos x \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1},$$

то применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, будем иметь

$$\frac{1}{p^2+1}\,Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{p} \risingdotseq 1.$$

Ответ: $y(x) = 1$. □

Пример 12. Найти непрерывное решение уравнения

$$\int\limits_0^x (x-t)\,y(t)\,dt = x.$$

Решение. Здесь $f(x) = x$ и $K(x,t) = x - t$, при этом $f(0) = 0$, но $K(x,x) \equiv 0$ и $f'(0) = 1 \neq 0$. Значит не выполнено необходимое условие существования непрерывного решения. Но все равно попробуем применить к уравнению преобразование Лапласа. Так как $x \risingdotseq \frac{1}{p^2}$, то будем иметь

$$\frac{1}{p^2}\,Y(p) = \frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = 1.$$

В классе непрерывных функций не существует функции[14], изображением по Лапласу которой является 1. □

2.3. Системы интегральных уравнений Вольтерры. Рассмотрим систему интегральных уравнений Вольтерры вида:

$$y_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{s} \int_0^x K_{ik}(x-t) y_k(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{24}$$

где $f_i(x)$ и $K_{ik}(x)$ – заданные функции, $i, k = 1, 2, \ldots, s$.
Пусть

$$f_i(x) \risingdotseq F_i(p), \quad K_{ik}(x) \risingdotseq K^{\star}_{ik}(p), \quad y_i(x) \risingdotseq Y_i(p).$$

Применяя к обеим частям уравнений (24) преобразование Лапласа, получим систему операторных уравнений

$$Y_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{s} K^{\star}_{ik}(p) Y_k(p), \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{25}$$

линейную относительно изображений $Y_i(p)$. Решая систему (25), найдем $Y_i(p) (i = 1, 2, \ldots, s)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (24).

Пример 13. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} y(x) & = & e^x + \int\limits_0^x y(t)\, dt - \int\limits_0^x e^{(x-t)} z(t)\, dt, \\ z(x) & = & -x - \int\limits_0^x (x-t)\, y(t)\, dt + \int\limits_0^x z(t)\, dt. \end{cases}$$

[14]Следует заметить, что $Y(p) = 1$ есть изображение δ-функции Дирака $\delta(x)$, которая является *обобщенной функцией*, определяемой равенством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \delta(x)\, dx = \varphi(0)$, имеющим место для всех непрерывных функций $\varphi(x)$. И поэтому решение интегрального уравнения в примере 12 существует, но в классе обобщенных функций.

Функция Дирака позволяет записать пространственную плотность физической величины (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенной или приложенной в некоторой точке пространства. О δ-функции см., например, в книге: Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2004.

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$, $z(x) \risingdotseq Z(p)$. Применим к каждому уравнению системы преобразование Лапласа. Используя теорему об интегрировании оригинала и теорему о свертке для построения изображений интегралов уравнений, получим:

$$\begin{cases} Y(p) = \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{Y(p)}{p} - \dfrac{Z(p)}{p-1}, \\ Z(p) = -\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{Y(p)}{p^2} + \dfrac{Z(p)}{p}. \end{cases}$$

Решая систему алгебраических уравнений, найдем изображения:

$$Y(p) = \frac{1}{p-2}, \quad Z(p) = -\frac{1}{p(p-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-2}\right),$$

которым соответствуют оригиналы:

$$y(x) = e^{2x}, \quad z(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{2x}.$$

Ответ: $y(x) = e^{2x}$, $z(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}$. □

Пример 14. Решить интегро–дифференциальное уравнение:

$$y''(x) + 2\,y'(x) - 2\int\limits_0^x \sin(x-t)\,y'(t)\,dt = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Применим к заданному уравнению преобразование Лапласа:

$$p^2Y(p) + 2pY(p) - 2\frac{1}{p^2+1}pY(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Решив уравнение относительно $Y(p)$, получим:

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \risingdotseq y(x) = 1 - e^{-x}x - e^{-x}.$$

Ответ: $y(x) = 1 - e^{-x}x - e^{-x}$. □

Пример 15. Решить интегро-дифференциальное уравнение:

$$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y''(t)\,dt +$$
$$+2\int\limits_0^x \sin(x-t)\,y'(t)\,dt = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$. Применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, получим:

$$p^2Y(p) - 2pY(p) + Y(p) + 2\frac{p}{p^2+1}p^2Y(p) + \frac{2}{p^2+1}pY(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Решив уравнение относительно $Y(p)$, будем иметь:

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq y(x) = \int\limits_0^x \cos(x-t)\,\sin t\,dt = \frac{x}{2}\sin x.$$

При переходе к оригиналу было использовано свойство изображения свертки.

Ответ: $y(x) = \frac{x}{2}\sin x$. □

3. Однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

3.1. Основные понятия и теоремы. Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{26}$$

Очевидно, что при любых значениях λ уравнение (26) имеет нулевое (тривиальное) решение. Но при определенных условиях могут существовать и ненулевые решения.

Определение 3. *Значения параметра $\lambda \neq 0$, при которых уравнение (26) имеет ненулевое решение, называются* **собственными** *(или* **характеристическими***) значениями интегрального уравнения (26), а соответствующие им решения $y(x)$ –* **собственными функциями***. Эти λ и $y(x)$ называются также* **собственными значениями** *и* **собственными функциями ядра** *$K(x,t)$.*

Сформулируем несколько теорем, определяющих условия существования и свойства собственных значений и собственных функций однородного уравнения (26) [3].

Теорема 2. *Пусть ядро $K(x,t)$ определено при $x \in [a,b]$, $t \in [a,b]$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $K(x,t) \not\equiv 0$;

2) $K(x,t)$ – *непрерывное или полярное ядро;*

3) $K(x,t)$ – *эрмитово ядро (в случае вещественных ядер — симметричное).*

Тогда существует по крайней мере одно собственное значение и одна собственная функция уравнения (26).

Собственных значений может быть конечное или счетное число. Если ядро неэрмитово, то оно может вовсе не иметь собственных значений.

Одному собственному значению могут соответствовать несколько собственных функций.

Определение 4. **Рангом собственного значения** *называется число линейно-независимых собственных функций, соответствующих этому собственному значению.*

Теорема 3. *Ранг любого собственного значения конечен.*

Нетрудно показать, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – собственные функции ядра $K(x,t)$, отвечающие одному и тому же собственному значению λ, то их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ также будет собственной, отвечающей этому же значению λ. Точно так же, если $y(x)$ – собственная функция, то $Cy(x)$, где C – любая постоянная, будет собственной функций ядра $K(x,t)$.

Таким образом, собственные функции $y_i(x)$, отвечающие данному собственному значению λ, образуют *линейное пространство*, размерность которого равна рангу собственного значения.

Тогда **общим решением однородного уравнения** (26), отвечающим данному характеристическому значению λ_j с рангом p, будет функция

$$y(x) = \sum_{i=1}^{p} C_i\, y_i(x),$$

где $y_i,\ i = 1, 2, \ldots, p,$ – собственные функции, соответствующие λ_j, C_i – произвольные постоянные.

Теорема 4. *Пусть ядро K(x, t) эрмитово. Тогда различным собственным значениям ядра соответствуют ортогональные между собой собственные функции.*

Система всех собственных функций $y_i(x)$ может быть приведена к **ортонормированному виду**, т. е.

$$\int\limits_a^b y_i(x)y_j^*(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{при } i=j; \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 5. *Вырожденное ядро (как эрмитово, так и неэрмитово) имеет не более конечного числа собственных функций.*

Если ядро эрмитово и имеет конечное число линейно-независимых собственных функций, то оно вырожденное.

Теорема 6. *Если ядро эрмитово (в вещественном случае — симметрично), то собственные значения ядра вещественны.*

Замечание. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – вещественные собственные функции вещественного симметричного ядра, соответствующие собственному значению λ, то комплексная функция $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ также будет собственной, соответствующей тому же значению λ.

3.2. Метод сведения интегрального уравнения к алгебраическим уравнениям. Решение уравнения (26) в случае вырожденного ядра может быть сведено к решению алгебраической системы уравнений. Покажем, как это выполнить. Если ядро $K(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Omega_i(x)\omega_i(t)$, то введя обозначения для интегралов

$$C_i = \lambda \int\limits_a^b \omega_i(t)\,y(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

уравнение (26) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \Omega_i(x). \tag{28}$$

Подставив (28) в (27), получим систему линейных уравнений для нахождения C_i:

$$C_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} C_j, \tag{29}$$

где

$$\alpha_{ij} = \int\limits_a^b \omega_i(t)\Omega_j(t)\,dt. \tag{30}$$

Нетривиальное решение системы (29) существует, если

$$\det(E - \lambda\mathcal{A}) = 0, \tag{31}$$

где E, $\mathcal{A}$ – матрицы размерности $n \times n$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача определения собственных значений ядра $K(x, t)$ сводится к решению алгебраического уравнения (31), которое называют **характеристическим**. После этого, подставляя найденные собственные значения λ в (29), из (29) и (28) находим соответствующие собственные функции.

Заметим, что собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, т. е. если $\varphi(x)$ – собственная функция, соответствующая некоторому характеристическому значению λ, то и $C\varphi(x)$, где C – произвольная постоянная, тоже является собственной функцией, соответствующей тому же характеристическому значению.

Пример 16. Найти собственные значения и собственные функции уравнения Фредгольма

$$y(x) - \lambda \int\limits_0^1 (1 + 2x)t\,y(t)\,dt = 0.$$

Решение. Ядро уравнения $K(x, t) = (1 + 2x)t$ – вырожденное. Обозначив

$$C = \lambda \int\limits_0^1 t\,y(t)\,dt, \tag{32}$$

заданное уравнение запишем в виде

$$y(x) = C \cdot (1 + 2x). \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), получим

$$C = \lambda \int_0^1 t\, C(1+2t)\, dt,$$

откуда, вычислив интеграл, будем иметь

$$C = \frac{7}{6}\lambda C.$$

Нетривиальное решение этого уравнения существует при $\lambda = \frac{6}{7}$. Это и есть собственное значение, которому соответствует собственная функция $y(x) = C(1+2x)$, где C – произвольная постоянная, отличная от 0.

Если требуется найти решения заданного уравнения, то ответ будет следующим: если $\lambda \neq \frac{6}{7}$, то уравнение имеет единственное нулевое решение $y(x) \equiv 0$; если $\lambda = \frac{6}{7}$, то уравнение имеет бесконечное множество решений $y(x) = C(1+2x)$, где C – произвольная постоянная. $\square$

Пример 17. Найти собственные значения и собственные функции уравнения Фредгольма

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t)\, y(t)\, dt = 0.$$

Решение. В этом уравнении ядро $K(x,t) = \sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$ является вырожденным. Введя обозначения для интегралов

$$C_1 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\, y(t)\, dt, \qquad C_2 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, y(t)\, dt, \tag{34}$$

заданное уравнение запишем в виде

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x. \tag{35}$$

Подставим (35) в (34):

$$C_1 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t (C_1 \sin t - C_2 \cos t)\, dt =$$

$$= \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t \, dt - \lambda C_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt = -\lambda C_2 \pi,$$

$$C_2 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin t (C_1 \sin t - C_2 \cos t) \, dt =$$

$$= \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt - \lambda C_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t \, dt = \lambda C_1 \pi.$$

В результате получили систему

$$\begin{cases} C_1 + \lambda\pi C_2 = 0, \\ \lambda\pi C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \tag{36}$$

которая будет иметь ненулевое решение, если

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda\pi \\ \lambda\pi & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda\pi)^2 + 1 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{\pi}.$$

Таким образом, нашли собственные значения ядра $K(x,t)$. Найдем соответствующие им собственные функции.
1) для $\lambda_1 = \frac{i}{\pi}$ система (36) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 + iC_2 = 0, \\ iC_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = iC_1.$$

Полагая $C_1 = 1$, по (35) найдем собственную функцию

$$y_1(x) = \sin x - i\cos x.$$

2) для $\lambda_2 = -\frac{i}{\pi}$ система (36) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 - iC_2 = 0, \\ -iC_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -iC_1.$$

Полагая $C_1 = 1$, по (35) найдем собственную функцию, соответствующую λ_2:

$$y_2(x) = \sin x + i\cos x.$$

Ответ: собственные значения и собственные функции:
$\lambda_1 = \frac{i}{\pi}$, $y_1(x) = \sin x - i\cos x$;
$\lambda_2 = -\frac{i}{\pi}$, $y_2(x) = \sin x + i\cos x$. □

Пример 18. Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin x \cos t \, y(t) \, dt.$$

Решение. Ядро уравнения $K(x,t) = \sin x \cos t$ является вырожденным. Обозначим $C = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \cos t y(t) \, dt$, тогда заданное уравнение примет вид $y(x) = C \sin x$. Составим уравнение для нахождения C:

$$C = \lambda \int\limits_0^{2\pi} C \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \lambda C \int\limits_0^{2\pi} \sin 2t \, dt = 0.$$

Таким образом, получили, что $C = 0$, и, следовательно, $y(x) \equiv 0$. А значит заданное уравнение не имеет собственных значений и собственных функций. $\square$

Пример 19. Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+t)} \, y(t) \, dt.$$

Решение. Так как ядро $K(x,t) = e^{-(x+t)}$ является вырожденным, то, обозначив $C = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} y(t) \, dt$, уравнение перепишем в виде $y(x) = Ce^{-x}$. Тогда

$$C = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \cdot Ce^{-t} \, dt = \lambda C \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_{t=0}^{t \to +\infty} \right) = \frac{1}{2} \lambda C.$$

В результате для нахождения C получили уравнение $C = \frac{1}{2} \lambda C$, которое имеет ненулевое решение, если $\lambda = 2$. Найденному собственному значению $\lambda_1 = 2$ соответствует собственная функция $y_1(x) = e^{-x}$. $\square$

4. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода

Рассмотрим неоднородное уравнение[15]

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{37}$$

где $K(x,t)$ – непрерывное или полярное ядро, а $f(x)$ — непрерывная функция.

Обозначим

$$A = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \int\limits_a^b |K(x,t)|\,dt, \quad B = \sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt}.$$

Теорема 7. *Пусть $K(x,t)$ – непрерывное ядро. Тогда непрерывное решение уравнения (37) существует и единственно при $|\lambda| < 1/B$.*

Теорема 8. *Пусть $K(x,t)$ – полярное ядро. Тогда непрерывное решение уравнения (37) существует и единственно при $|\lambda| < 1/A$.*

4.1. Метод последовательных приближений. При выполнении условия теоремы 7 решение уравнения (37) может быть найдено *методом последовательных приближений* как предел равномерно сходящейся последовательности приближений $y_n(x)$, определяемых рекуррентным соотношением

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y_n(t)\,dt + f(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{38}$$

где $y_0(x)$ – произвольная функция.

Пример 20. Решить уравнение

$$y(x) - \int\limits_0^1 xt\,y(t)\,dt = 2x,$$

методом последовательных приближений.

[15] Полное исследование вопроса о разрешимости уравнения (37) с непрерывным ядром $K(x,t)$ и свободным членом $f(x)$ при различных значениях параметра λ было проведено И. Фредгольмом в 1904 г. [6].

Решение. В этом уравнении $\lambda = 1$ и ядро $K(x,t) = xt$ является непрерывным. Найдем

$$B^2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |K(x,t)|^2\, dx\, dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x^2 t^2\, dx\, dt = \frac{1}{9}.$$

Условие $|\lambda| = 1 < \frac{1}{B} = 3$ выполнено. Следовательно, по теореме 7 заданное уравнение имеет единственное непрерывное решение.

Пусть $y_0(x) = 2x$, по формулам (38) найдем

$$y_1(x) = 2x + \int\limits_0^1 xt\, y_0(t)\, dt = 2x + x\int\limits_0^1 t \cdot 2t\, dt = 2x + 2x \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{8}{3}x,$$

$$y_2(x) = 2x + \int\limits_0^1 xt\, y_1(t)\, dt = 2x + x\int\limits_0^1 t \cdot \tfrac{8}{3}t\, dt = 2x(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2}),$$

$$y_3(x) = 2x + \int\limits_0^1 xt\, y_2(t)\, dt = 2x(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^3}).$$

По индукции можно показать, что

$$y_n(x) = 2x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) = 2x \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}.$$

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2x \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 2x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 2x \cdot \frac{1}{2/3} = 3x.$$

Таким образом, $y(x) = 3x$. □

4.2. Метод резольвент (метод итерированных ядер). При выполнении условия теоремы 7 решение уравнения (37) может быть получено и *методом резольвент* с помощью формулы

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,t,\lambda) f(t)\, dt, \tag{39}$$

где $R(x,t,\lambda)$ – резольвента ядра $K(x,t)$, определяемая при $|\lambda| < 1/B$ как сумма ряда

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t), \tag{40}$$

где $K_n(x,t)$ – повторные (итерированные) ядра, определяемые из рекуррентного соотношения

$$K_1(x,t)=K(x,t),\quad K_{n+1}(x,t)=\int\limits_a^b K(x,s)K_n(s,t)\,ds,\quad n=1,2,\ldots \tag{41}$$

Пример 21. Построив резольвенту ядра $K(x,t)=xe^t$, решить уравнение

$$y(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^t y(t)\,dt=e^{-x}.$$

Решение. Здесь $\lambda=\frac{1}{2}$, $f(x)=e^{-x}$. Ядро $K(x,t)$ является функцией непрерывной и

$$B^2=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |K(x,t)|^2\,dx\,dt=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 x^2e^{2t}\,dx\,dt=\frac{1}{6}(e^2-1).$$

Так как $\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{6}{e^2-1}}$ то условие $|\lambda|<\frac{1}{B}$ выполнено. Следовательно, заданное уравнение имеет единственное непрерывное решение.

Используя формулы (41), найдем

$$K_1(x,t)=K(x,t)=xe^t,$$

$$K_2(x,t)=\int\limits_0^1 K(x,s)\,K_1(s,t)\,ds=\int\limits_0^1 xe^s\cdot se^t\,ds=xe^t\int\limits_0^1 se^s\,ds=xe^t.$$

$$K_3(x,t)=\int\limits_0^1 K(x,s)\,K_2(s,t)\,ds=\int\limits_0^1 xe^s\cdot se^t\,ds=xe^t\int\limits_0^1 se^s\,ds=xe^t.$$

Нетрудно показать, что

$$K_n(x,t)=xe^t,\quad n=1,2,\ldots$$

По формуле (40) найдем резольвенту ядра:

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t)=xe^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2xe^t.$$

Используя формулу (39), получим решение заданного интегрального уравнения

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 2xe^t e^{-t}\,dt = e^{-x} + \int\limits_0^1 x\,dt = e^{-x} + x.$$

Ответ: $y(x) = e^{-x} + x$. □

Теоремы 7 и 8 устанавливают условия, определяющие область значений параметра λ, при которых будет заведомо существовать непрерывное решение интегрального уравнения (37). Эти условия **«малости»** λ гарантируют сходимость последовательности приближений, определяемых рекуррентным соотношением (38), и ряда (40).

В случае, когда ядро непрерывно, часто удобно пользоваться более грубым, но легко проверяемым **критерием «малости»** λ.

Обозначим $M = \sup\limits_{a\leqslant x,t\leqslant b} |K(x,t)|$. Поскольку $B \leqslant M(b-a)$, то теорема 7 остается тем более в силе при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$. Часто под «малым» λ понимают значение λ, удовлетворяющее последнему неравенству.

Однако решение уравнения (38) может существовать и в случае, когда $|\lambda| > \frac{1}{B}$. Например, для ядра $K(x,t) \equiv 1$ уравнения

$$y(x) = \lambda\int\limits_0^1 y(x)\,dt + 1 \tag{42}$$

имеем

$$B^2 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 K^2(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 dx\,dt = 1.$$

Таким образом, решение уравнения (42), рассмотренными выше методами, согласно теореме 7 может быть построено, если $|\lambda| < 1$.

Постройте решение уравнения (42) методом последовательных приближений и методом резольвент.

Однако при $|\lambda| > 1$ уравнение (42) разрешимо. Непосредственной подстановкой легко проверить, что, если $\lambda \neq 1$, то функция $y(x) = \frac{1}{\lambda-1}$ является решением уравнения (42).

Значит для анализа интегрального уравнения в случае нарушения условия «малости» необходимо использовать другие приемы, например, рассмотренный в следующем пункте.

4.3. Метод сведения к алгебраическим уравнениям. Если ядро уравнения (37) вырожденное, то процесс решения (37) сводится к решению системы алгебраических уравнений. А именно, пусть

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\Omega_i(x)\omega_i(t).$$

Тогда из (37) следует

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\Omega_i(x)C_i+f(x), \tag{43}$$

где

$$C_i=\lambda\int\limits_a^b\omega_i(t)y(t)\,dt,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Подставив (43) в последние равенства, получим систему уравнений для определения C_i:

$$C_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}C_j=\beta_i\ \ (i=1,2,\ldots,n)\quad\Leftrightarrow\ (E-\lambda\mathcal{A})C=\beta, \tag{44}$$

где

$$\alpha_{ij}=\int\limits_a^b\omega_i(t)\Omega_i(t)\,dt,\qquad \beta_i=\int\limits_a^b f(t)\omega_i(t)\,dt.$$

Интегральное уравнение (37) и система линейных алгебраических уравнений (44) являются **эквивалентными** в том смысле, что разрешимость системы[16] (44) влечет разрешимость уравнения (37) и наоборот.

Если λ **не совпадает ни с одним собственным значением** ядра $K(x,t)$, то решение системы (44) единственно. Определив C_i из (44), по формуле (43) находим функцию $y(x)$.

[16]Разрешимость системы линейных уравнений можно исследовать, используя, например, теорему Крамера.

Если λ **совпадает с некоторым собственным значением** ядра $K(x,t)$, то для существования решения системы (44) необходимо и достаточно, чтобы вектор значений β был ортогонален всем решениям $D^{(s)}$ однородной системы с транспонированной матрицей $\mathcal{A}^T$:

$$(E - \lambda \mathcal{A}^T) D^{(s)} = \mathbf{0}, \quad s = 1, \ldots, \operatorname{rank} \lambda.$$

или

$$D_i^{(s)} - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} D_j^{(s)} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \;\; s = 1, \ldots, \operatorname{rank} \lambda,$$

где $\operatorname{rank} \lambda$ – ранг собственного значения λ.

Таким образом, неоднородное уравнение (37) может иметь единственное решение, иметь бесконечно много решений или вообще не иметь решений.

Пример 22. Решить уравнение $y(x) - \int\limits_0^1 xt\, y(t)\, dt = 2x$.

Решение. Ядро уравнения $K(x,t) = xt$ является вырожденным. Обозначим

$$C = \int\limits_0^1 t\, y(t)\, dt. \tag{A1}$$

При этом заданное уравнение примет вид

$$y(x) = Cx + 2x. \tag{A2}$$

Подставим $(A2)$ в $(A1)$:

$$C = \int\limits_0^1 t\,(Ct + 2t)\, dt = \frac{1}{3}(C+2) \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Подставляя найденное C в $(A2)$, получим искомое решение. Сравните его с найденным в примере 20.
Ответ: $y(x) = 3x$. □

Решите уравнение примера 21 методом сведения к алгебраическому уравнению.

Пример 23. При каких λ уравнение

$$y(x) = 6x - 2 + \lambda \int_0^1 (t + x) y(t)\, dt.$$

имеет единственное решение?

Решение. Так как ядро $K(x,t) = x + t$ является вырожденным, то, введя обозначения:

$$C_1 = \lambda \int_0^1 y(t)\, dt, \quad C_2 = \lambda \int_0^1 t y(t)\, dt, \tag{A1}$$

уравнение можно записать в виде

$$y(x) = 6x - 2 + C_1 x + C_2. \tag{A2}$$

Подставив (A1) в (A2), будем иметь

$$C_1 = \lambda \int_0^1 (6t - 2 + C_1 t + C_2) \ = \lambda \left(\tfrac{1}{2} C_1 + C_2 + 1 \right),$$

$$C_2 = \lambda \int_0^1 t(6t - 2 + C_1 t + C_2)\, dt = \lambda \left(1 + \tfrac{1}{3} C_1 + \tfrac{1}{2} C_2 \right).$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\lambda - 1 \right) C_1 + \lambda C_2 = -\lambda, \\ \frac{1}{3}\lambda C_1 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1 \right) C_2 = -\lambda. \end{cases} \tag{A3}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\lambda - 1 & \lambda \\ \frac{1}{3}\lambda & \frac{1}{2}\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{6}.$$

При $\lambda \neq -6 \pm 4\sqrt{6}$ система (A3) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера,

$$C_1 = \frac{6\lambda(\lambda - 2)}{\lambda^2 + 12\lambda - 12}, \quad C_2 = \frac{2\lambda(6 - \lambda)}{\lambda^2 + 12\lambda - 12}. \tag{A4}$$

Таким образом, если $\lambda \neq -6 \pm 4\sqrt{6}$, то заданное уравнение имеет единственное решение, которое получаем, подставив выражения (A4) в (A2),

$$y(x) = \frac{2\lambda(3(\lambda-2)x+6-\lambda}{\lambda^2+12\lambda-12} + 6x - 2.$$

Покажите, что при $\lambda = -6 \pm 4\sqrt{6}$ система (A3) не имеет решения, а значит и заданное уравнение не разрешимо.

$\square$

Пример 24. При каких значениях параметров a и b разрешимо интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xt\, y(t)\, dt + ax + b\sin x\ ?$$

Решение. Обозначим $C = \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ty(t)\, dt$. При этом уравнение примет вид

$$y(x) = Cx + ax + b\sin x.$$

Составим уравнение для нахождения C:

$$C = \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t(Ct + at + b\sin t)\, dt.$$

Вычислив интеграл, получим

$$C = \frac{\lambda\pi^3}{24}(C+a) + \lambda b \iff C\left(1 - \frac{\lambda\pi^3}{24}\right) = \lambda\left(\frac{\pi^3 a}{24} + b\right). \qquad (*)$$

1) если $\lambda \neq \frac{24}{\pi^3}$, то $C = \frac{\lambda(a\pi^3+24b)}{24-\lambda\pi^3}$ и заданное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = (C+a)x + b\sin x = \frac{24(\lambda b + a)}{24 - \lambda\pi^3} + b\sin x.$$

2) если $\lambda = \frac{24}{\pi^3}$ и $\pi^3 a + 24b = 0$, то решением уравнения $(*)$ будет произвольная постоянная C. Значит заданное уравнение имеет бесконечное множество решений

$$y(x) = (C+a)x + b\sin x = \tilde{C}x + b\sin x,$$

где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная.

3) если $\lambda = \frac{24}{\pi^3}$ и $\pi^3 a + 24b \neq 0$, то уравнение $(*)$, а значит и заданное уравнение не имеет решения. □

Замечание. Так как уравнения с вырожденным ядром сводятся к легко решаемым линейным алгебраическим уравнениям, то существует *приближенный метод* решения интегральных уравнений с произвольным ядром. Он основан на аппроксимации ядра вырожденным $\tilde{K}(x,t)$: функция $K(x,t)$ приближенно заменяется конечной суммой произведений функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. В качестве вырожденного ядра, близкого к данному $K(x,t)$, можно брать отрезок ряда Тейлора для функции $K(x,t)$, отрезок ряда Фурье по некоторой полной ортогональной системе функций $\{u_n(x)\}$ и т. д. При этом надо уметь оценивать погрешность в решении интегрального уравнения[17] (37) от замены ядра $K(x,t)$ на вырожденное $\tilde{K}(x,t)$ (примеры см. в [7]).

4.4. Теоремы Фредгольма. Рассмотрим для уравнения (37)

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x) \tag{37}$$

союзное (сопряженное) ему уравнение

$$z(x) = \lambda^* \int_a^b K^*(t,x)z(t)\,dt + g(x). \tag{45}$$

Теорема 9. *Если λ – собственное значение ядра $K(x,t)$, то λ^* является собственным значением союзного ядра $K^*(t,x)$.*

Следующие теоремы Фредгольма устанавливают связь между разрешимостью уравнения (37) с решением однородного союзного к нему уравнения [3, 6].

[17] В [6] приводится теорема, дающая оценку погрешности решения, которая получается при замене данного ядра на близкое к нему другое ядро, в частности на вырожденное.

Теорема 10. *Однородное уравнение*

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt \tag{46}$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$z(x) = \lambda^* \int\limits_a^b K^*(t,x)z(t)\,dt \tag{47}$$

при любом фиксированном λ *имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений:* $y_1, \ldots, y_n$; $z_1, \ldots, z_n$.

Под ортогональными функциями $f(x)$ и $z(x)$ понимают такие функции, которые удовлетворяют условиям

$$\int\limits_a^b f(x)z^*(x)\,dx = 0.$$

Теорема 11. *Если* λ *– собственное значение ядра* $K(x,t)$*, то для существования решения уравнения (37) необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была ортогональна всем решениям союзного однородного уравнения, соответствующим* λ^**.*

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая **альтернатива Фредгольма** [7].

Теорема 12 (альтернатива Фредгольма). *Либо неоднородное уравнение (37) разрешимо при любой непрерывной функции* $f(x)$*, либо однородное уравнение (46) имеет нетривиальное решение.*

Пример 25. Решить уравнение Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^1 (2x - t)y(t)\,dt + ax$$

при различных значениях параметров.

Решение. Для заданного уравнения составим соответствующее ему союзное однородное уравнение ($\mu = \lambda^*$):

$$z(x) = \mu \int\limits_0^1 (2t - x) z(t)\, dt. \tag{A1}$$

Будем искать его решение в виде

$$z(x) = C_1 x + C_2. \tag{A2}$$

Для нахождения C_1 и C_2 подставим (A2) в (A1). Будем иметь

$$C_1 x + C_2 = \mu \int\limits_0^1 (2t - x)(C_1 t + C_2)\, dt = -\mu \left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) x + \mu \left(\frac{2}{3} C_1 + C_2 \right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{\mu}{2} C_1 - \mu C_2, \\ C_2 = \frac{2}{3} \mu C_1 + \mu C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) C_1 + \mu C_2 = 0, \\ \frac{2}{3} \mu C_1 + (1 - \mu) C_2 = 0. \end{cases} \tag{A3}$$

Нетривиальное решение системы (A3), а значит и уравнения (A1), существует, если

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\mu}{2} & \mu \\ -\frac{2}{3}\mu & 1 - \mu \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu^2 - 3\mu + 6 = 0.$$

Решая последнее уравнение, найдем собственные значения уравнения (A1)

$$\mu_1 = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{15}}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{15}}{2}, \qquad \mu_1^* = \mu_2.$$

Решив систему (A3) при найденных μ, построим соответствующие им собственные функции в виде (A2), полагая $C_1 = 1$,

$$z_1(x) = x + d_1, \qquad z_2(x) = x + d_2,$$

где

$$d_1 = \frac{-9 - i\sqrt{15}}{12}, \qquad d_2 = \frac{-9 + i\sqrt{15}}{12}, \qquad d_1^* = d_2.$$

Заметим, что $z_1^*(x) = z_2(x)$.

Так как правая часть заданного уравнения является полиномом 1-й степени, то его решение ищется в виде $y(x) = Ax + B$. Подставляем искомое для $y(x)$ выражение в уравнение, получим

$$A = \lambda(A + 2B) + a, \qquad B = -\lambda\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{2}\right). \tag{A4}$$

Отсюда при $\lambda \neq \mu_i$, $i = 1, 2$, найдем

$$A = \frac{(6+3\lambda)a}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}, \qquad B = \frac{-2\lambda a}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}.$$

Тогда при $\lambda \neq \mu_i$, $i = 1, 2$, и любом a решением заданного уравнения будет функция

$$y(x) = \frac{((6+3\lambda)x - 2\lambda)a}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}.$$

При $\lambda = \lambda_1 = \mu_1^*$ решение уравнения существует, если $f(x) = ax$ и $z_1(x)$ ортогональны:

$$\int\limits_0^1 f(x)\cdot z_1^*(x)\,dx = \int\limits_0^1 ax\cdot(x + d_2)\,dx = 0 \;\Leftrightarrow\; a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}d_2\right) = 0,$$

т. е. при $a = 0$.

Тогда, решив систему (A4), найдем

$$y(x) = A\left(x + \frac{1}{2}d_2\right), \quad A \text{ – произвольная постоянная.}$$

Аналогично устанавливается решение заданного уравнения при $\lambda = \lambda_2 = \mu_2^*$:

$$y(x) = A\left(x + \frac{1}{2}d_1\right), \quad A \text{ – произвольная постоянная.}$$

$\square$

4.5. Интегральные уравнения с симметричным ядром. Сформулируем теорему, которая определяет вид решения интегрального уравнения (37) с симметричным ядром, когда известны собственные значения и собственные функции ядра [3, 6].

Теорема 13. *Пусть ядро $K(x,t)$ вещественно, непрерывно или слабополярно, симметрично.*

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ – собственные функции ядра, приведенные к ортонормированному виду[18]*, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$ – соответствующие собственные значения. Тогда:*

а) если λ не совпадает ни с одним собственным значением, то решение уравнения (37) существует, единственно и определяется выражением

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_i \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}\, y_i(x), \tag{48}$$

где суммирование производится по всем собственным функциям ядра, и

$$f_i = \int_a^b f(x) y_i(x)\, dx \quad i = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Решение может быть представлено и с помощью резольвенты

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t)\, dt, \tag{50}$$

где

$$R(x,t,\lambda) = \sum_i \frac{y_i(x) y_i(t)}{\lambda_i - \lambda} \tag{51}$$

– резольвента ядра $K(x,t)$.

б) если $\lambda = \lambda_n$, где λ_n – некоторое собственное значение ядра $K(x,t)$, и функция $f(x)$ ортогональна всем собственным функциям $y_{n_1}, \ldots, y_{n_p}$, соответствующим собственному значению λ_n ранга p, то решение уравнения существует, не является единственным и представимо в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda_n \sum_{i,\, i \neq n_1, \ldots, n_p} \frac{f_i y_i(x)}{\lambda_i - \lambda_n} + \sum_{i = n_1, \ldots, n_p} C_i y_i(x), \tag{52}$$

где C_i произвольные коэффициенты;

в) если $\lambda = \lambda_n$, а $f(x)$ не ортогональна хотя бы одной собственной функции, соответствующей λ_n, то решение не существует.

[18]См. стр. 27.

Замечание. Если собственные функции $y_i(x)$ не приведены к нормированному виду (т. е. условия $\int\limits_a^b y_i^2(x)\,dx = 1,\ i = 1, 2, \ldots,$ могут быть не выполнены), то коэффициенты f_i в (48) и (52) и резольвента $R(x, t, \lambda)$ в (50) определяются по следующим формулам:

$$f_i = \frac{1}{||y_i||^2} \int\limits_a^b f(x) y_i(x)\,dx, \tag{49'}$$

$$R(x, t, \lambda) = \sum_i \frac{1}{||y_i||^2} \frac{y_i(x) y_i(t)}{\lambda_i - \lambda}, \tag{51'}$$

где $\quad ||y_i||^2 = \int\limits_a^b y_i^2(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots$

Формулы (48) и (52) называют **формулами Шмидта**.

Пример 26. Решить уравнение $y(x) - \lambda \int\limits_0^1 xt\, y(t)\,dt = 2x$.

Решение. Ядро уравнения $K(x, t) = xt$ является симметричным. Найдем его собственные значения и функции, рассматривая однородное уравнение

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^1 xt\, y(t)\,dt.$$

Пусть $C = \lambda \int\limits_0^1 t\, y(t)\,dt$, тогда $y(x) = Cx$, и для нахождения собственных значений составляем уравнение

$$C = \lambda \int\limits_0^1 t \cdot Ct\,dt \iff C = \lambda C \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_1 = 3.$$

Соответствующая собственная функция $y_1(x) = Cx$. Выберем C таким, чтобы

$$\int\limits_0^1 y_1^2(x)\,dx = 1 \iff \frac{1}{3} C^2 = 1 \Rightarrow C = \sqrt{3}.$$

Следовательно, ядро $K(x,t) = xt$ имеет одно собственное значение $\lambda_1 = 3$, которому соответствует собственная функция $y_1(x) = \sqrt{3}x$.

Найдем для правой части уравнения $f(x) = 2x$ коэффициент f_1:

$$f_1 = \int_0^1 f(x) y_1(x)\, dx = \int_0^1 2x \cdot \sqrt{3}x\, dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Согласно теореме 13 заданное уравнение:

1) при $\lambda \neq 3$ имеет единственное решение, определяемое по формуле Шмидта (48),

$$y(x) = 2x + \lambda \cdot \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}x}{3 - \lambda} = 2x + \frac{2x\lambda}{3 - \lambda}.$$

В частности, для $\lambda = 1$ решением уравнения будет функция $y(x) = 3x$. Сравните этот результат с полученным в примере 22.

2) при $\lambda = 3$ уравнение не имеет решений, так как $f_1 \neq 0$ (т. е. функция $f(x)$ не ортогональна собственной $y_1(x)$). $\square$

Пример 27. Решить уравнение $y(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \cos(x+t)\, y(t)\, dt + \cos 3x$.

Решение. Найдем собственные значения и собственные функции ядра $K(x,t) = \cos(x+t)$, которое является симметричным и вырожденным. Так как

$$K(x,t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t,$$

то ненулевое решение соответствующего однородного уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)\, y(t)\, dt$$

будем искать в виде

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{A1}$$

Покажите, что система для нахождения C_1 и C_2 имеет вид:

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0, \\ C_2 \left(1 + \frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0. \end{cases} \tag{A2}$$

Очевидно, система (A2) имеет ненулевое решение, если $\lambda = \pm\frac{2}{\pi}$. Получаем:

1) если $\lambda = \frac{2}{\pi}$, то $C_2 = 0$ и C_1 – любая постоянная, отличная от 0. Собственному значению $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ соответствует собственная функция $y_1(x) = \cos x$.

2) если $\lambda = -\frac{2}{\pi}$, то $C_1 = 0$ и C_2 – любая постоянная, отличная от 0. Собственному значению $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ соответствует собственная функция $y_2(x) = \sin x$.

Для построения решения заданного уравнения с помощью формул Шмидта, учитывая замечание к теореме 13, найдем:

$$||y_1||^2 = \int\limits_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad ||y_2||^2 = \int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2};$$

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos 3x \cos x\,dx = 0, \quad f_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos 3x \cos x\,dx = 0.$$

Тогда, согласно теореме 13:

1) для любых $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ заданное уравнение имеет единственное решение $y(x) = \cos 3x$.

2) для $\lambda = \frac{2}{\pi}$ уравнение имеет бесконечное множество решений $y(x) = \cos 3x + C\cos x$, где C – любая постоянная.

3) для $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ уравнение имеет бесконечное множество решений $y(x) = \cos 3x + C\sin x$, где C – любая постоянная. □

Вопросы для самопроверки к теме 8

1. Какое уравнение называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода?
2. Какое уравнение называется интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода?
3. Какие ядра интегральных уравнений называются фредгольмовыми?

4. Какое уравнение называется интегральным уравнением Вольтерры 2-го рода?
5. Какое уравнение называется интегральным уравнением Вольтерры 1-го рода?
6. Какое ядро называется эрмитовым? Симметричным?
7. Какое ядро называется полярным? Слабополярным?
8. Какое ядро называется вырожденным?
9. Сформулируйте теорему о существовании собственного значения и собственной функции однородного уравнения Фредгольма 2-го рода.
10. Что называют рангом собственного значения?
11. Сформулируйте теорему о количестве собственных чисел вырожденного ядра.
12. Укажите способ решения однородного уравнения Фредгольма 2-го рода в случае вырожденного ядра.
13. Сформулируйте теорему о собственных значениях эрмитового ядра.
14. Какие ядра называются повторными?
15. Какими способами можно найти решение неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода?
16. Сформулируйте теоремы Фредгольма.
17. Укажите метод решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода в случае вырожденного ядра.
18. Сформулируйте теорему о решении неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода в случае вещественного, непрерывного или слабополярного, симметричного ядра.
19. Укажите способы решения неоднородного уравнения Вольтерры 2-го рода.

Упражнения для самостоятельной работы к теме 8

Решите интегральные уравнения, сведя их предварительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

1. $y(x) = e^x + \int\limits_0^x y(t)\,dt;$

2. $y(x) = 1 + \int\limits_0^x ty(t)\,dt;$

3. $y(x) = \sin x + \int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt;$

4. $y(x) = x + 2\sin x - 1 - \int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt.$

Решите интегральные уравнения методом последовательных приближений

5. $y(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt, \quad y_0(x) = 1;$

6. $y(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int\limits_0^x y(t)\,dt, \quad y_0(x) = 1;$

7. $y(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt, \quad y_0(x) = 0;$

8. $y(x) = 1 + \int\limits_0^x (x-t))y(t)\,dt, \quad y_0(x) = 0.$

Найдите с помощью резольвенты решения следующих интегральных уравнений

9. $y(x) = x - \frac{1}{2}\int\limits_0^x xy(t)\,dt;$

10. $y(x) = 1 - \int\limits_0^x ty(t)\,dt;$

11. $y(x) = \sin x + 2\int\limits_0^x e^{x-t}y(t)\,dt;$

12. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int\limits_0^x \frac{1+t^2}{1+x^2}\,y(t)\,dt.$

Решите уравнения, сведя их к уравнению Вольтерры 2-го рода

13. $\int\limits_0^x (2 + x^2 - t^2)y(t)\,dt = x^2;$

14. $\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt = e^x - 1;$

15. $\int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt = e^x - x - 1;$

16. $\int\limits_0^x (x-t)^2 y(t)\,dt = x^3.$

Методом последовательных приближений решите следующие уравнения

17. $y(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y(t)\,dt = \sin\pi x;$

18. $y(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos^2 t\,y(t)\,dt = 1;$

19. $y(x) - \pi\int\limits_0^1 (1-x)\sin 2\pi t\,y(t)\,dt = \frac{1}{2}(1-x);$

С помощью итерированных ядер найдите резольвенты и решения интегральных уравнений

20. $y(x) - \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^1 \frac{x}{1+t^2}\,y(t)\,dt = 1 + x^2;$

21. $y(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi y(t)\,dt = \sin x;$

22. $y(x) - \frac{\ln 2}{2}\int\limits_0^1 2^{x+t} y(t)\,dt = x;$

23. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos t y(t)\,dt = 1.$

Найдите характеристические числа и функции уравнений

24. $y(x) - \lambda\int\limits_0^1 (xt - 2x^2)y(t)\,dt = 0;$

25. $y(x) - \lambda\int\limits_0^1 (1+2x)t\,y(t)\,dt = 0;$

26. $y(x) - \lambda\int\limits_0^\pi x\sin t\,y(t)\,dt = 0;$

27. $y(x) - \lambda\int\limits_0^1 (x+t)\,y(t)\,dt = 0;$

28. $y(x) - \lambda\int\limits_0^\pi \sin(x+t)\,y(t)\,dt = 0.$

Решите уравнения Фредгольма при различных значениях параметров

29. $y(x) = \lambda\int\limits_{-1}^1 (x+t)\,y(t)\,dt + ax + b;$

30. $y(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x^2t + xt^2)\, y(t)\, dt + ax + bx^3;$

31. $y(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{0} (1 + x)(1 - t)\, y(t)\, dt + ae^x + b.$

Найдите собственные значения и собственные функции ядра $K(x,t) = e^{-x^2-t^2}$, $x, t \in (\infty, +\infty)$ и решите уравнения (*Указание.* При выполнении преобразований используйте интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi}$.):

32. $y(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-t^2} y(t)\, dt - x^2;$

33. $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-t^2} y(t)\, dt - x^2;$

34. $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-t^2} y(t)\, dt + x.$

Решите следующие уравнения с помощью преобразования Лапласа (операционным методом):

35. $y(x) = \sin 2x - \frac{8}{3} \int\limits_{0}^{x} \operatorname{sh} 3(x - t)\, y(t)\, dt,$

36. $y(x) = \cos x + \int\limits_{0}^{x} (x - t)\, y(t)\, dt,$

37. $y(x) = x + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} (x - t)^2\, y(t)\, dt,$

38. $y(x) = x + \int\limits_{0}^{x} \sin(x - t)\, y(t)\, dt,$

39. $y(x) = \cos x + \int\limits_{0}^{x} e^{x-t}\, y(t)\, dt,$

40. $y(x) = 1 + x + \int\limits_{0}^{x} \cos(x - t)\, y(t)\, dt,$

41. $y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} (x - t)^2\, y(t)\, dt,$

42. $y(x) = x + 2 \int\limits_{0}^{x} (x - t + \sin(t - x))\, y(t)\, dt,$

43. $y(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int\limits_{0}^{x} (3 + 6(x - t) - 4(x - t)^2)\, y(t)\, dt,$

44. $y(x) = 1 + \frac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3\, y(t)\, dt,$

45. $\sin^2 x = \int\limits_0^x \sin(x-t) y(t)\, dt.$

Решите системы интегральных уравнений с помощью преобразования Лапласа:

46. $$\begin{cases} y_1(x) = 1 - 2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\, y_1(t)\, dt + \int\limits_0^x y_2(t)\, dt, \\ y_2(x) = 4x - \int\limits_0^x y_1(t)\, dt + 4\int\limits_0^x (x-t)\, y_2(t)\, dt; \end{cases}$$

47. $$\begin{cases} y_1(x) = 2 - \int\limits_0^x (x-t)\, y_1(t)\, dt - 4\int\limits_0^x y_2(t)\, dt, \\ y_2(x) = 1 - \int\limits_0^x y_1(t)\, dt - \int\limits_0^x (x-t)\, y_2(t)\, dt. \end{cases}$$

С помощью преобразования Лапласа найдите решения интегро-дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

48. $$y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\, y''(t)\, dt +$$
$$+\, 2\int\limits_0^x \sin(x-t)\, y'(t)\, dt = \cos x, \qquad y(0) = y'(0) = 0;$$

49. $y''(x) - y(x) - 4\int\limits_0^x (x-t)\cos(x-t)\, y(t)\, dt = 0,$

$y(0) = 4,\ y'(0) = 0;$

50. $y''(x) + y(x) + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\, y(t)\, dt + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\, y'(t)\, dt = \operatorname{ch} x,$

а) $y(0) = y'(0) = 0;$

б) $y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

Ответы к упражнениям по теме 8

1. $y(x) = (x+1)e^x$; **2.** $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$; **3.** $y(x) = x$;
4. $y(x) = (x-1)\cos x + 2\sin x$. **5.** $y(x) = \cos x$; **6.** $y(x) = x$;
7. $y(x) = \sin x$; **8.** $y(x) = \operatorname{ch} x$. **9.** $y(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{4}}$;
10. $y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$; **11.** $y(x) = \frac{1}{5}\left(e^{3x} - \cos x + 2\sin x\right)$;
12. $y(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$; **13.** $y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
14. Решение существует в классе обобщенных функций, $y(x) = 2e^x - 1 + \delta(x)$, где $\delta(x)$ – δ-функция Дирака;
15. $y(x) = e^x$; **16.** $y(x) = 3$.
17. $y(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$; **18.** $y(x) = \frac{2}{3}$;
19. $y(x) = 1 - x$;
20. $R(x,t) = \frac{2x}{1+t^2}$, $y(x) = 1 + x^2 + \frac{2x}{\ln 2}$;
21. $R(x,t) = 2$, $y(x) = \sin x + \frac{2}{\pi}$;
22. $R(x,t) = 2^{x+t+2}$, $y(x) = x + \frac{2\ln 2 - 1}{\ln 2}\, 2^{x+1}$;
23. $R(x,t) = 2\sin x \cos t$, $y(x) = 1 + 2\sin x$;
24. $\lambda_1 = \lambda_2 = -6$, $y_1(x) = x(1-2x)$;
25. $\lambda = \frac{1}{\pi}$, $y(x) = \sin x$; **26.** $\lambda = \frac{1}{\pi}$, $y(x) = x$;
27. $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}$, $y_1(x) = \sqrt{3}\,x + 1$,
$\lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$, $y_2(x) = -\sqrt{3}\,x + 1$;
28. $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$, $y_1(x) = \sin x + \cos x$, $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$, $y_2(x) = \sin x - \cos x$.

29. Если $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, то для любых a и b уравнение имеет единственное непрерывное решение $y(x) = \frac{2\lambda}{3-4\lambda^2}\left((3b + 2\lambda a)x + 2\lambda b + a\right) + ax + b$; если $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a + \sqrt{3}b = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений вида $y(x) = C\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}a + ax + b$, где C – произвольная постоянная; если $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a - \sqrt{3}b = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений вида $y(x) = C\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}a + ax + b$, где C – произвольная постоянная; если $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a + \sqrt{3}b \neq 0$, то уравнение не имеет решений; если $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a - \sqrt{3}b \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

30. Если $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$, то для любых a и b уравнение имеет единственное решение $y(x) = \frac{\lambda}{15-4\lambda^2}(10a+6b)^2 + \frac{2}{5}\lambda x + ax + bx^3$; если $\lambda = \frac{\sqrt{15}}{2}$ и $5a+3b=0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений вида $y(x) = C\left(x^2 + \frac{\sqrt{15}}{5}x\right) + ax + bx^3$, где C – произвольная постоянная; если $\lambda = -\frac{\sqrt{15}}{2}$ и $5a+3b=0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений вида $y(x) = C\left(x^2 - \frac{\sqrt{15}}{5}x\right) + ax + bx^3$, где C – произвольная постоянная; если $\lambda = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ и $5a+3b \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

31. Если $\lambda \neq \frac{3}{2}$, то для любых a и b уравнение имеет единственное решение $y(x) = \frac{3\lambda}{3-2\lambda}\left((2-3e^{-1})a + \frac{3}{2}b\right)(x+1) + ae^x + b$; если $\lambda = \frac{3}{2}$ и $(2-3e^{-1})a + \frac{3}{2}b = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений вида $y(x) = C(x+1) + a\,e^x + b$, где C – произвольная постоянная; если $\lambda = \frac{3}{2}$ и $(2-3e^{-1})a + \frac{3}{2}b \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

32. $\lambda_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $y_1(x) = e^{-x^2}$ $y(x) = -x^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi-2}}e^{-x^2}$;

33. уравнение не разрешимо;

34. $y(x) = x + Ce^{-x^2}$, C – произвольная постоянная.

35. $y(x) = \frac{1}{5}(13\sin 2x - 16\operatorname{sh} x)$; **36.** $y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x)$;

37. $y(x) = \frac{1}{3}(e^x - e^{-x/2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{3}e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2})$;

38. $y(x) = x + \frac{1}{6}x^3$;

39. $y(x) = \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$;

40. $y(x) = 2 + x - e^{x/2}(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2})$;

41. $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{3}e^{-x/2}(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2})$;

42. $y(x) = \frac{1}{3}(e^x - e^{-x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x)$; **43.** $y(x) = e^x$;

44. $y(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x)$;

45. $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2x$.

46. $y_1(x) = e^{-x}(1-x)$, $y_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}$;

47. $y_1(x) = 2(1-x)e^{-x}$, $y_2(x) = (1-x)e^{-x}$.

48. $y(x) = \frac{1}{2}x\sin x$;

49. $y(x) = 2x\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x + \cos\sqrt{3}x$;

50. а) $y(x) = 1 - \cos x$; б) $y(x) = 1 - x + 2(\sin x - \cos x)$.

Список использованной и рекомендованной литературы

1. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.

2. *Васильева А. Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 432 с.

3. *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* Интегральные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 160 с.

4. Дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие в 3-х частях. Ч. 1. / сост. Кручек М. М., Светова Н. Ю., Семенова Е. Е. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. 100 с.

5. Дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие в 3-х частях. Ч. 2. / сост. Светова Н. Ю., Семенова Е. Е. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. 75 с.

6. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию : Учебное пособие. М.: КомКнига, 2006. 304 с.

7. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями : Учебное пособие. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 192 с.

8. *Ловитт У. В.* Линейные интегральные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 232 с.

9. Математика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. 848 с.

10. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2003. 120 с.

11. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 608 с.

Учебное издание

Дифференциальные и интегральные уравнения

Часть 3

Учебное пособие для студентов физико-технического факультета

Составители:
Светова Нина Юрьевна
Семёнова Елена Евгеньевна

Редактор *?. ?. ??????????*
Компьютерная верстка *Е. Е. Семёновой*

Подписано в печать ??.??.2014. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. ?,?. Тираж 100 экз.
Изд. № ???

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ

185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33